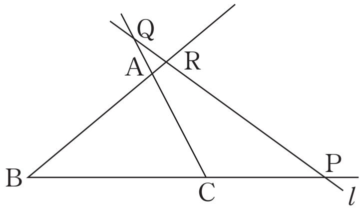
PART3　チェバの定理・メネラウスの定理

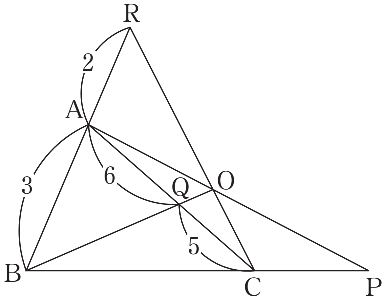
3　(1)　右図の △ABC において，辺 BC，CA，AB の延長と直線 l との交点をそれぞれ P，Q，R とするとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

が成り立つことを証明せよ。ただし，直線 l は △ABC の頂点を通らない。

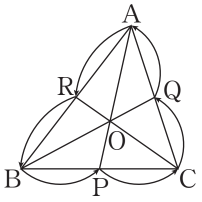


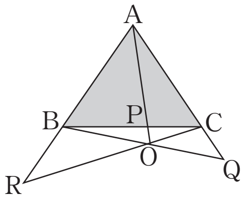
(2)　右図の △ABC の外部に点 O があり，直線 AO，BO，CO がそれぞれ辺 BC，CA，AB またはその延長と交わる点をそれぞれ P，Q，R とする。BA：AR＝3：2，AQ：QC＝6：5 のとき，BQ：QO を求めよ。



Point Pickup

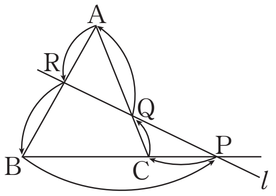
チェバの定理

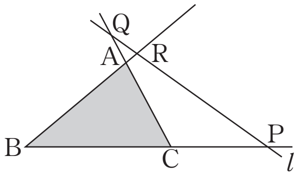




$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

メネラウスの定理

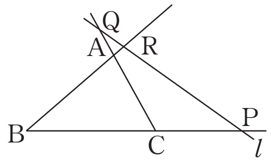




$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

第 6 講　PART3　確認問題

1 右図の $\triangle ABC$ において，辺 BC，CA，AB の延長と直線 l との交点をそれぞれ P，Q，R とするとき



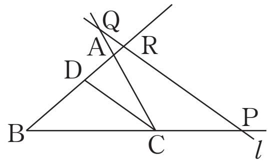
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

が成り立つことを証明せよ。ただし，直線 l は $\triangle ABC$ の頂点を通らない。

選択肢は最も適切なものを選べ。

（証明）

点 C を通り直線 l に平行な直線を引き，直線 AB との交点を D とすると



PR // CD より　$\dfrac{BP}{PC}=\boxed{\text{ア}}$　……(＊)

RQ // CD より　$\dfrac{CQ}{QA}=\boxed{\text{イ}}$　……(＊＊)

(＊)，(＊＊)の両辺をそれぞれ掛けると

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=\boxed{\text{ア}}\cdot\boxed{\text{イ}}$$

この両辺に $\boxed{\text{ウ}}$ を掛けると

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\boxed{\text{ウ}}=\boxed{\text{ア}}\cdot\boxed{\text{イ}}\cdot\boxed{\text{ウ}}$$

この右辺は

$$\boxed{\text{ア}}\cdot\boxed{\text{イ}}\cdot\boxed{\text{ウ}}=1$$

であるから

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

[ア の選択肢]

① $\dfrac{BR}{AR}$　② $\dfrac{BC}{BP}$　③ $\dfrac{BA}{DA}$

④ $\dfrac{BD}{RD}$　⑤ $\dfrac{BR}{RD}$

[イ の選択肢]

① $\dfrac{DR}{RA}$　② $\dfrac{RA}{RB}$　③ $\dfrac{RB}{RD}$

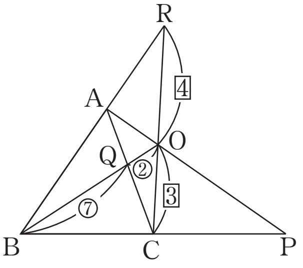
④ $\dfrac{CD}{RP}$　⑤ $\dfrac{CD}{RQ}$

[ウ の選択肢]

① $\dfrac{RA}{AB}$　② $\dfrac{RB}{BA}$　③ $\dfrac{DB}{BC}$

④ $\dfrac{RB}{BC}$　⑤ $\dfrac{AR}{RB}$　⑥ $\dfrac{BR}{RB}$

2 右図のように △ABC の外部に点Ｏがあり，直線 AO, BO, CO がそれぞれ辺 BC, CA, AB およびその延長と交わる点をそれぞれ P, Q, R とする。BQ：QO＝7：2, CO：OR＝3：4 のとき，AQ：QC を求めよ。ただし，最も簡単な整数の比で答えよ。



AQ：QC＝ エ ： オ

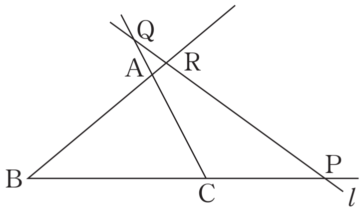
[MEMO]

PART3　チェバの定理・メネラウスの定理

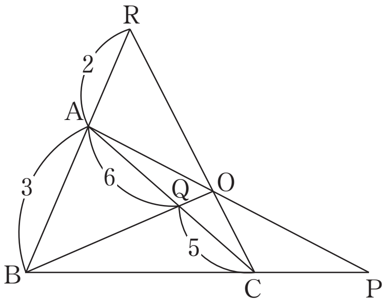
3 (1) 右図の △ABC において，辺 BC，CA，AB の延長と直線 l との交点をそれぞれ P，Q，R とするとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

が成り立つことを証明せよ。ただし，直線 l は △ABC の頂点を通らない。



(2) 右図の △ABC の外部に点 O があり，直線 AO，BO，CO がそれぞれ辺 BC，CA，AB またはその延長と交わる点をそれぞれ P，Q，R とする。BA：AR＝3：2，AQ：QC＝6：5 のとき，BQ：QO を求めよ。

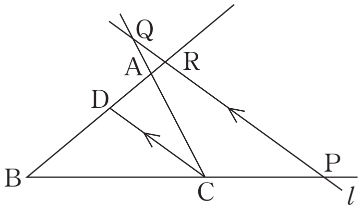


(1) 点 C を通り直線 l に平行な直線を引き，直線 AB との交点を D とすると

PR // CD より $\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{BR}{RD}$

QR // CD より $\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{DR}{RA}$

よって $\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{BR}{RD}\cdot\dfrac{DR}{RA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$



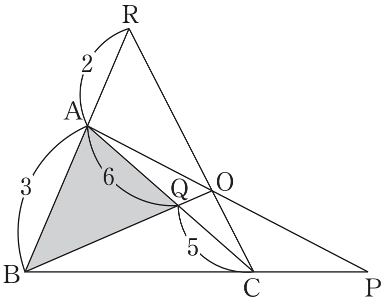
(2) △ABQ と直線 RC について，(1)より

$$\frac{BR}{RA}\cdot\frac{AC}{CQ}\cdot\frac{QO}{OB}=1$$

$$\frac{5}{2}\cdot\frac{11}{5}\cdot\frac{QO}{OB}=1$$

$$\frac{QO}{OB}=\frac{2}{11}$$

したがって　BQ：QO＝9：2

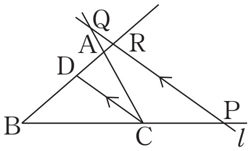


第 6 講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：⑤，イ：①，ウ：⑤

[解説]

点Cを通り直線 l に平行な直線を引き，直線ABとの交点をDとすると



PR // CD より　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\dfrac{\mathbf{BR}}{\mathbf{RD}}$　……(＊)　[A]

RQ // CD より　$\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\dfrac{\mathbf{DR}}{\mathbf{RA}}$　……(＊＊)

(＊)，(＊＊)の両辺をそれぞれ掛けると

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DR}}{\mathrm{RA}}$$

この両辺に $\dfrac{\mathbf{AR}}{\mathbf{RB}}$ を掛けると

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DR}}{\mathrm{RA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}$$

この右辺は

$$\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DR}}{\mathrm{RA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

であるから

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

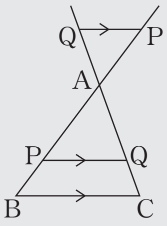
[A]　平行線と線分の比

下図において，PQ // BC のとき

AP：AB＝AQ：AC

＝PQ：BC

AP：PB＝AQ：QC



2 ［正解］エ：4，オ：5

［解説］

△OQC と直線 BR について，メネラウスの定理により ［B］

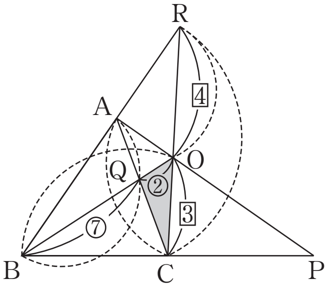
$$\frac{OB}{BQ}\cdot\frac{QA}{AC}\cdot\frac{CR}{RO}=1$$

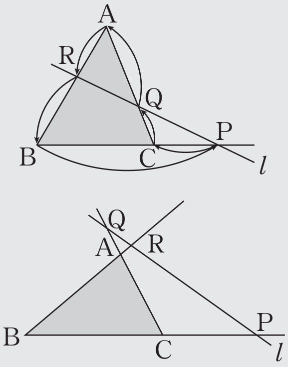
すなわち

$$\frac{2+7}{7}\cdot\frac{QA}{AC}\cdot\frac{3+4}{4}=1$$

よって　$\frac{QA}{AC}=\frac{4}{9}$

したがって　AQ：QC＝**4：5**



［B］　メネラウスの定理

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$